Produktive Aufgaben mit magischen Quadraten

Maria Koth, Universität Wien und Pädagogische Hochschule Wien

1. Was sind magische Quadrate?

Unter einem **magischen Quadrat** versteht man bekanntlich ein nxn-Zahlenquadrat bestehend aus den Zahlen 1, 2, 3, ..., n², bei dem

- jede der n Zeilensummen,
- jede der n Spaltensummen
- und auch jede der beiden Diagonalensummen

denselben Wert hat. Die gemeinsame Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme wird die **magische Konstante** des Quadrats genannt. Sie beträgt

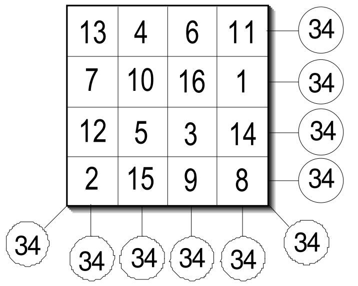


Abb. 1: Beispiel eines magischen 4x4-Quadrats

$$K_n = \frac{\textit{Summe aller Zahlen des Quadrats}}{\textit{Anzahl der Zeilen}} = \frac{1+2+3+...+n^2}{n} = \frac{(1+n^2)\cdot n^2}{2n} = \frac{n\cdot(1+n^2)}{2}$$

Das kleinste magische Quadrat ist ein 3x3-Quadrat mit den Eintragungen 1 bis 9 und der magischen Konstante 15. Man überlegt, dass in diesem Fall stets 5 in der Mitte des Quadrats und die geraden Zahlen 2, 4, 6 und 8 in den vier Ecken stehen müssen. Die einzigen möglichen magischen 3x3-Quadrate mit den Zahlen 1 bis 9 sind somit die acht in Abb. 2 dargestellten Quadrate.

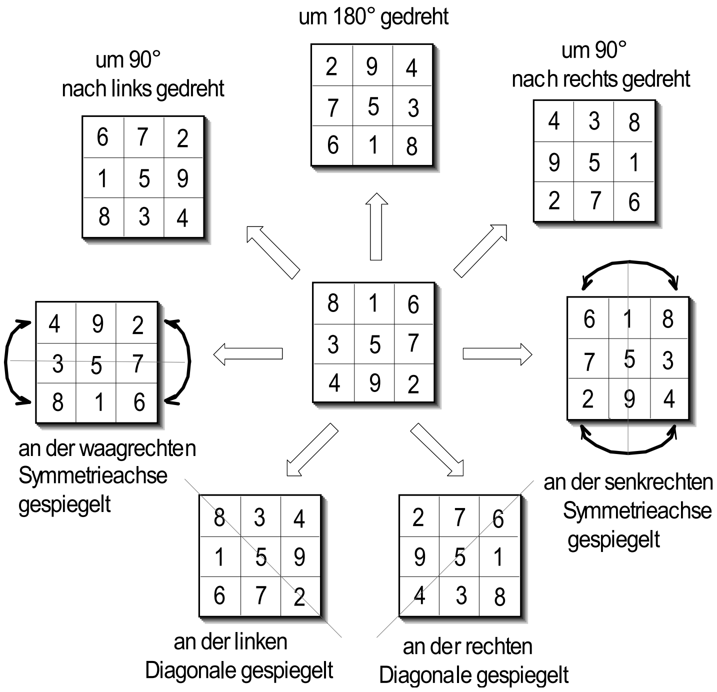


Abb. 2: Acht symmetrische Lagen eines magischen Quadrats

Magisches Quadrat mit den Zahlen		Magische Konstante
1 bis 9	3x3	15
1 bis 16	4x4	34
1 bis 25	5x5	65
1 bis 36	6x6	111
1 bis 49	7x7	175
1 bis 64	8x8	260
1 bis 81	9x9	369
1 bis 100	10x10	505

Abb. 3: Magische Konstante für n = 3 bis n = 10

Jedes magische Quadrat liefert sofort sieben weitere magische Quadrate, indem man das Quadrat um 90°, 180° bzw. 270° dreht oder indem man es an einer der vier Symmetrieachsen des Quadrats spiegelt (siehe Abb. 2).

Unterscheidet man diese acht symmetrischen Lagen nicht, so gibt es

- genau ein magisches 3x3 – Quadrat mit den Eintragungen 1 bis 9,
- 880 magische 4x4 – Quadrate mit den Eintragungen 1 bis 16,
- 275 305 224 magische 5x5 – Quadrate mit den Eintragungen 1 bis 25 (siehe [2]).

Mit wachsendem n nimmt dann die Zahl der möglichen magischen Quadrate sehr rasch zu. Die genaue Zahl der magischen nxn-Quadrate für $n \geq 6$ ist nicht bekannt, die Zahl der magischen 6x6-Quadrate wird auf $\approx 10^{19}$ geschätzt, die Zahl der magischen 10x10-Quadrate auf $\approx 10^{110}$ (siehe [2]).

2. Magische 4x4-Quadrate vervollständigen

Beispiel:
Im diesem Zahlenquadrat sind sieben der Zahlen 1 bis 16 vorgegeben, die übrigen dieser Zahlen sollen so angeordnet werden, dass ein magisches 4x4-Quadrat entsteht.

			15
	3	9	6
	8	14	
			12

→

5			15
16	3	9	6
11	8	14	**1**
2			12

→

5			15
16	3	9	6
11	8	14	**1**
2	**13**		12

→

5	**10**	**4**	15
16	3	9	6
11	8	14	**1**
2	**13**	**7**	12

Sind drei der vier Zahlen einer Zeile, Spalte bzw. Diagonale bekannt, so kann die fehlende vierte Zahl durch Ergänzen auf die magische Konstante 34 bestimmt werden. In diesem Beispiel ergänzt man in der zweiten Zeile 16, in der vierten Spalte 1, in der dritten Zeile 11, in der linken Diagonale 5 und in der rechten Diagonale 2.

Die möglichen Anordnungen der nun noch fehlenden Zahlen 4, 7, 10 und 13 können durch systematisches Probieren gefunden werden. Eine gute Strategie dabei ist, mit der größten (oder mit der kleinsten) dieser Zahlen zu beginnen. Hier könnte man, zum Beispiel, folgendermaßen überlegen:

- Da 13+14+9 größer als 34 ist, kann 13 nicht in der dritten Spalte stehen.
- Da 13+5+15 = 33 ist, und 33 durch keine der noch verfügbaren Zahlen 4, 7, 10 auf 34 ergänzt werden kann, kann 13 auch nicht in der ersten Zeile stehen.
- Somit kann 13 nur in der letzten Zeile neben 2 angeordnet werden.
- Die restlichen Zahlen sind dadurch eindeutig festgelegt.

Je nach Anzahl und Anordnung der vorgegebenen Zahlen kann man Vervollständigungsaufgaben mit nur einer Lösung oder auch mit mehreren Lösungen stellen:

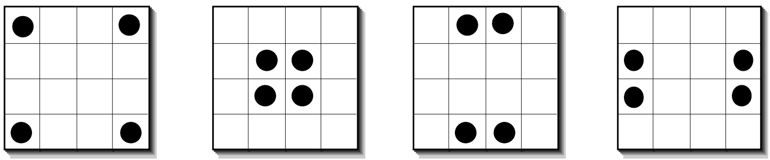
- Im einfachsten Fall können alle fehlenden Zahlen durch Ergänzen dreier Zahlen auf die magische Konstante 34 gefunden werden. Hier steht das Kopfrechnen im Vordergrund.
- Sind weniger Zahlen bekannt, so sind zur Lösung der Aufgabe mehr und mehr auch kombinatorische Überlegungen erforderlich. Hier geht es dann auch wesentlich darum, zu erkennen, wie viele Lösungen es gibt und alle möglichen Lösungen zu finden.

3. Magische 4x4-Quadrate

Von besonderem Interesse für Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht sind magische 4x4-Quadrate. Die Anzahl 880 dieser Quadrate ist einerseits groß genug, um viele Möglichkeiten für interessante Fragestellungen zu bieten und andrerseits so überschaubar, dass viele Struktureigenschaften dieser magischen Quadrate seit langem gut bekannt sind. Als Anregung für mögliche Begründungsaufgaben werden im Folgenden einige Eigenschaften magischer 4x4-Quadrate zusammengefasst.

a. Weitere Zahlengruppen mit Summe 34

In magischen 4x4-Quadraten tritt die Konstante 34 nicht nur als Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme, sondern stets auch als Summe der folgenden vier Zahlen auf (siehe Abb. 4):



$E = 34$ $\quad D_1 + D_2 – E = 34$ $\quad Z_1 + Z_4 – E = 34$ $\quad S_1 + S_4 – E = 34$

Abb. 4: Weitere Vierergruppen von Zahlen mit Summe 34.

Für die Summe E der vier Ecken des Quadrats gilt
$2 \cdot E = D_1 + D_2 + S_1 + S_4 – Z_2 – Z_3 = 34 + 34 + 34 + 34 – 34 – 34 = 68$ und daher $E = 34$.
(Wobei S_1 und S_4 die erste bzw. die vierte Spaltensumme, Z_2 und Z_3 die zweite bzw. dritte Zeilensumme und D_1 und D_2 die beiden Diagonalensummen bezeichnen.)

Daher ist die Summe der vier mittleren Zahlen gegeben durch $D_1 + D_2 – E = 34 + 34 – 34 = 34$, die Summe der beiden mittleren Zahlen der ersten Zeile und der beiden mittleren Zahlen der letzten Zeile durch $Z_1 + Z_4 – E = 34$, die Summe der beiden mittleren Zahlen der ersten Spalte und der beiden mittleren Zahlen der letzten Spalte durch $S_1 + S_4 – E = 34$.

b. Die vier Quadranten und die vier 3x3-Teilquadrate

Für die Summen Q_1, Q_2, Q_3 bzw. Q_4 der vier Zahlen eines Quadranten gilt (siehe Abb. 5):

$Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_3 = Q_3 + Q_4 = Q_4 + Q_1 = 68$

Daraus folgt, dass $Q_1 = Q_3$ und $Q_2 = Q_4$ ist.

Insbesondere ist daher

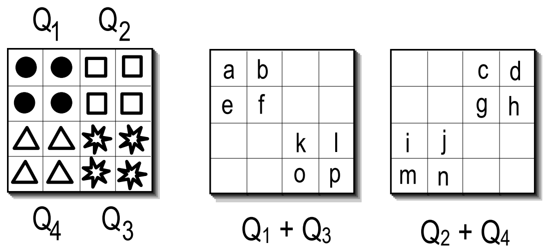


Abb. 5: Die vier Quadranten

$e + b + l + o = 34 \Leftrightarrow Q_1 = 34 \Leftrightarrow Q_3 = 34 \Leftrightarrow Q_2 = 34 \Leftrightarrow Q_4 = 34 \Leftrightarrow c + h + i + n = 34$

Analog dazu gilt auch für die Summen T_1, T_2, T_3 bzw. T_4 der vier Eckzahlen eines 3x3-Teilquadrats

$T_1 + T_2 = T_2 + T_3 = T_3 + T_4 = T_4 + T_1 = 68$
und daher $T_1 = T_3$ und $T_2 = T_4$.

Auch hier folgt

$c + h + i + n = 34 \Leftrightarrow T_1 = 34 \Leftrightarrow T_3 = 34 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow T_2 = 34 \Leftrightarrow T_4 = 34 \Leftrightarrow e + b + l + o = 34$

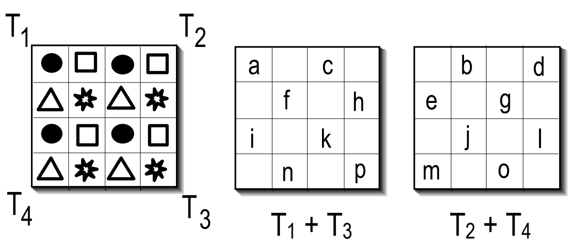


Abb. 6: Die vier 3x3-Teilquadrate

c. Anordnung der geraden und ungeraden Zahlen bzw. der Zahlen 1 bis 8 und 9 bis 16

Jede Zeile und jede Spalte eines magischen 4x4-Quadrats mit den Eintragungen 1 bis 16 enthält zwei gerade und zwei ungerade Zahlen sowie zwei der Zahlen 1 bis 8 und zwei der Zahlen 9 bis 16.

Für die Diagonalen dagegen ist das nicht notwendigerweise der Fall: Es gibt auch magische Quadrate, bei denen die eine Diagonale aus vier geraden und die zweite Diagonale aus vier ungeraden Zahlen besteht bzw. Quadrate, bei denen die eine Diagonale drei der Zahlen 1 bis 8 und die andere Diagonale drei der Zahlen 9 bis 16 enthält.

d. Pandiagonale magische 4x4-Quadrate

Abb. 7 zeigt ein magisches 4x4-Quadrat, bei dem auch alle „gebrochenen“ Diagonalen die magische Konstante 34 als Summe haben. Magische Quadrate mit dieser Eigenschaft nennt man **pandiagonal**.

Pandiagonale magische nxn-Quadrate gibt es nur für alle ungeraden $n \geq 5$ sowie für alle durch vier teilbaren n.

8	13	12	1
11	2	7	14
5	16	9	4
10	3	6	15

8	13	12	1
11	2	7	14
5	16	9	4
10	3	6	15

Abb. 7: Beispiel eines pandiagonalen magischen 4x4-Quadrats.

Fügt man bei einem pandiagonalen 4x4-Quadrat eine Kopie der ersten, zweiten und dritten Zeile unterhalb des Quadrats als fünfte, sechste und siebente Zeile und eine Kopie der ersten, zweiten und dritten Spalte rechts neben dem Quadrat als fünfte, sechste und siebente Spalte an, so erhält man ein 7x7-Zahlenquadrat, in dem jedes der sechzehn 4x4-Teilquadrate wieder ein pandiagonales magisches Quadrat ist (siehe Abb. 8). Jedes pandiagonale magische 4x4-Quadrat liefert also durch Verschieben der Zeilen und Spalten sofort 15 weitere pandiagonale magische 4x4-Quadrate.

Von gedrehten und gespiegelten Lagen abgesehen gibt es genau 48 verschiedene pandiagonale magische Quadrate mit den Zahlen 1 bis 16. Jedes dieser 48 Quadrate kann aus einem der drei in Abb. 8 dargestellten pandiagonalen Quadrate durch Verschieben von Zeilen und Spalten erhalten werden.

1	**14**	**11**	**8**	1	14	11
15	**4**	**5**	**10**	15	4	5
6	**9**	**16**	**3**	6	9	16
12	**7**	**2**	**13**	12	7	2
1	14	11	8	1	14	11
15	4	5	10	15	4	5
6	9	16	3	6	9	16

1	**8**	**13**	**12**	1	8	13
14	**11**	**2**	**7**	14	11	2
4	**5**	**16**	**9**	4	5	16
15	**10**	**3**	**6**	15	10	3
1	8	13	12	1	8	13
14	11	2	7	14	11	2
4	5	16	9	4	5	16

1	**8**	**10**	**15**	1	8	10
14	**11**	**5**	**4**	14	11	5
7	**2**	**16**	**9**	7	2	16
12	**13**	**3**	**6**	12	13	3
1	8	10	15	1	8	10
14	11	5	4	14	11	5
7	2	16	9	7	2	16

Abb. 8: Alle 48 möglichen pandiagonalen 4x4-Quadrate

Pandiagonale magische 4x4-Quadraten haben außerdem die Eigenschaft, dass die vier Eckzahlen jedes der neun 2x2-Teilquadrate die magische Konstante als Summe haben.
Darüber hinaus findet man in allen pandiagonalen magischen 4x4-Quadraten Zahlenpaare mit gleich großer Summe. Bezeichnet man die Elemente wie in Abb. 9, so gilt:

$$a + b = g + h = i + j = o + p \quad \text{und} \quad c + d = e + f = k + l = m + n$$
$$a + d = f + g = i + l = n + o \quad \text{und} \quad b + c = e + h = j + k = m + p$$
$$a + e = c + g = j + n = l + p \quad \text{und} \quad b + f = d + h = i + m = k + o$$
$$a + m = c + o = f + j = h + l \quad \text{und} \quad b + n = d + p = e + i = g + k$$

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

Abb. 9

e. Semipandiagonale magische 4x4-Quadrate

Abb. 10 zeigt ein magisches 4x4-Quadrat, bei dem (zwar nicht alle sechs gebrochenen Diagonalen, aber zumindest) die beiden aus zwei mal zwei Zahlen bestehenden gebrochenen Diagonalen die magische Konstante 34 als Summe haben.

4	5	10	15
11	14	1	8
13	12	7	2
6	3	16	9

4	5	10	15
11	14	1	8
13	12	7	2
6	3	16	9

Abb. 10: Beispiel eines semipandiagonalen magischen 4x4-Quadrats.

Magische 4x4-Quadrate mit dieser Eigenschaft nennt man **semipandiagonal**.

Nach 3.b. ist ein magisches 4x4-Quadrat genau dann semipandiagonal,
- wenn die Summe der vier Zahlen eines (und damit aller vier) Quadranten 34 beträgt,
- bzw. wenn die Summe der vier Eckzahlen eines (und damit aller vier) 3x3-Teilquadrate 34 beträgt.

f. Die zwölf Strukturgruppen magischer 4x4-Quadrate

Aus den Zahlen 1 bis 16 kann man acht Zahlenpaare mit Summe 17 bilden, nämlich 1 und 16, 2 und 15, 3 und 14, 4 und 13, 5 und 12, 6 und 11, 7 und 10 sowie 8 und 9. Verbindet man in einem magischen 4x4-Quadrat jedes dieser Zahlenpaare durch eine Linie, so erhält man ein für das Quadrat charakteristisches Diagramm.

2	14	11	7
16	9	4	5
1	8	13	12
15	3	6	10

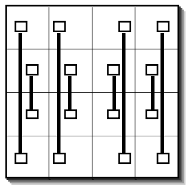
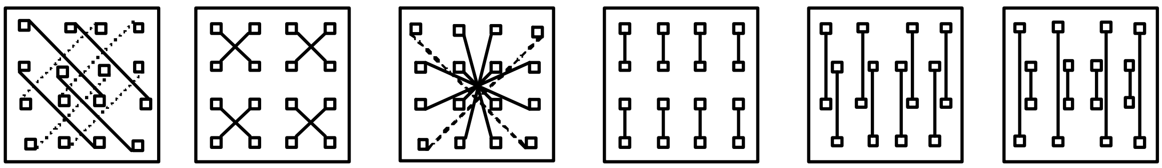
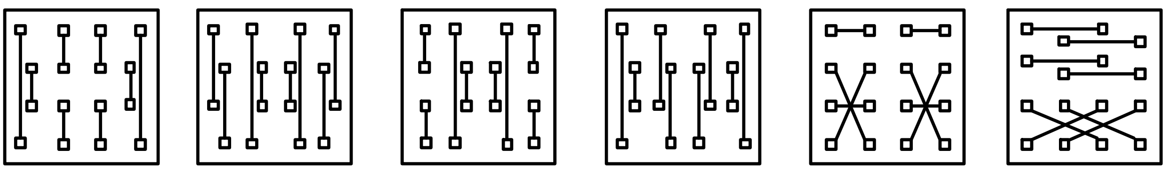


Abb. 11: Strukturdiagramm eines magischen 4x4-Quadrats.

Je nach Aussehen dieses Diagramms kann man die magischen 4x4-Quadrate in zwölf Gruppen einteilen (siehe Abb. 12). Die in Abb. 12 gewählte Nummerierung der einzelnen Gruppen geht auf den englischen Puzzlisten Henry Dudeney (siehe [3]) zurück.



Gruppe 1 **Gruppe 2** **Gruppe 3** **Gruppe 4** **Gruppe 5** **Gruppe 6**



Gruppe 7 **Gruppe 8** **Gruppe 9** **Gruppe 10** **Gruppe 11** **Gruppe 12**

Abb. 12: Die zwölf Strukturgruppen magischer 4x4-Quadrate

Den 48 pandiagonalen magischen Quadraten entsprechen in dieser Klassifizierung die Quadrate von Gruppe 1. Alle semipandiagonalen Quadrate gehören einer der Gruppen 1 bis 6 an, wobei alle Quadrate der Gruppen 1 bis 5 und 96 der 304 Quadrate der Gruppe 6 semipandiagonal sind.
Eine vollständige Liste aller 880 magischen 4x4-Quadrate, gegliedert nach den zwölf Gruppen wird in [5] zum Download angeboten.

Abb. 13 zeigt die zahlenmäßige Verteilung der 880 magischen 4x4-Quadrate auf die einzelnen Gruppen:

Gruppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der magischen Quadrate	48	48	48	96	96	304	56	56	56	56	8	8

Abb. 13: Anzahl magischer 4x4-Quadrate

g. Symmetrische magische 4x4-Quadrate

Die magischen Quadrate der Gruppe 3 werden **symmetrisch** genannt, da in diesen Quadraten die acht Zahlenpaare mit Summe 17 symmetrisch zum Quadratmittelpunkt angeordnet sind. Auch das bekannte „Dürer-Quadrat“ gehört dieser Gruppe an (siehe Abb. 14).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Abb. 14: Dürer-Quadrat

Alle symmetrischen magischen 4x4-Quadrate sind semipandiagonal.

Außerdem ist erwähnenswert, dass in den Zeilen und Spalten dieser Quadrate Zahlenpaare mit gleich großer Summe auftreten. Entsprechend der Bezeichnung von Abb. 15 gilt in allen symmetrischen magischen 4x4-Quadraten:

$$a + b = g + h = k + l = m + n \quad \text{und} \quad c + d = e + f = i + j = o + p$$
$$a + e = d + h = j + n = k + o \quad \text{und} \quad b + f = c + g = i + m = l + p$$

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

Abb. 15

4. Umordnungen der Zahlen 1 bis 16 in einem magischen 4x4-Quadrat

Weitere Fragestellungen ergeben sich im Zusammenhang mit Umordnungen der Zahlen 1 bis 16 eines vorgegebenen magischen 4x4-Quadrats:

a. Geänderte Reihenfolge der Zeilen (bzw. der Spalten)

Ändert man die Reihenfolge der Zeilen eines magischen Quadrats, so bleiben die vier Zeilensummen und auch die vier Spaltensummen gleich groß (siehe Abb. 16). Ein derart umgeordnetes magisches Quadrat ist daher genau dann noch immer magisch, wenn die beiden Diagonalensummen weiterhin 34 betragen.

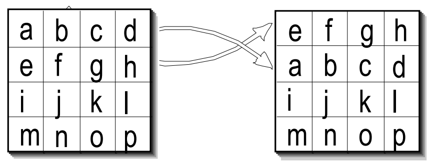


Abb. 16: Vertauschen zweier Zeilen ändert die Zeilen- und Spaltensummen nicht.

Insgesamt gibt es 24 mögliche Reihenfolgen für die vier Zeilen eines 4x4-Quadrats. In der letzte Spalte von Abb. 17 ist angegeben, bei welchen Anordnungen der vier Zeilen alle magischen Quadrate einer bestimmten Strukturgruppe magisch bleiben. (Abb. 17 gilt analog auch für die Umordnung der Spalten.)

Ändert man die Reihenfolge der Zeilen eines semipandiagonalen magischen 4x4-Quadrats und ordnet anschließend im erhaltenen Zahlenquadrat die Spalten in derselben geänderten Reihenfolge an, so erhält man stets wieder ein semipandiagonales magisches Quadrat.
Wird insbesondere eine der Umordnungen c), d), g), h), i) bzw. n) von Abb. 17 auf die Zeilen und anschließend auf die Spalten angewendet, so bleibt sogar jedes magische 4x4-Quadrat magisch.

	Änderung der Reihenfolge 1 – 2 – 3 – 4 der Zeilen eines magischen 4x4-Quadrats	Reihenfolge der Zeilen	Zusätzliche Spiegelung an der waagrechten Symm.achse ergibt	Man erhält wieder ein magisches Quadrat für
a)	1./2. Zeile tauschen	2 – 1 – 3 – 4	4 – 3 – 1 – 2	Gruppe 2
b)	1./3. Zeile tauschen	3 – 2 – 1 – 4	4 – 1 – 2 – 3	Pandiagonale Quadrate
c)	1./4. Zeile tauschen	4 – 2 – 3 – 1	1 – 3 – 2 – 4	Symmetrische Quadrate
d)	2./3. Zeile tauschen	1 – 3 – 2 – 4	4 – 2 – 3 – 1	Symmetrische Quadrate
e)	2./4. Zeile tauschen	1 – 4 – 3 – 2	2 – 3 – 4 - 1	Pandiagonale Quadrate
f)	3./4. Zeile tauschen	1 – 2 – 4 – 3	3 – 4 – 2 – 1	Gruppe 2
g)	1./2. Zeile und 3./4. Zeile tauschen	2 – 1 – 4 – 3	3 – 4 – 1 – 2	Semipandiag. Quadrate
h)	1./3. Zeile und 2./4. Zeile tauschen	3 – 4 – 1 - 2	2 – 1 – 4 – 3	Semipandiag. Quadrate
i)	1./4. Zeile und 2./3. Zeile tauschen	4 – 3 – 2 – 1	1 – 2 – 3 – 4	Alle magischen Quadrate
j)	2. Zeile ausschneiden und als letzte Zeile unten anfügen	1 – 3 – 4 – 2	2 – 4 – 3 – 1	
k)	3. Zeile ausschneiden und als erste Zeile oben anfügen	3 – 1 – 2 – 4	4 – 2 – 1 – 3	
l)	1. Zeile ausschneiden und nach der 3. Zeile einfügen	2 – 3 – 1 - 4	4 – 1 – 3 – 2	
m)	4. Zeile ausschneiden und nach der 1. Zeile einfügen	1 – 4 – 2 - 3	3 – 2 – 4 – 1	
n)	3. Zeile vor der 1. Zeile und 2.Zeile nach der 4. Zeile einfügen	3 – 1 – 4 - 2	2 – 4 – 1 – 3	Symmetrische Quadrate

Abb. 17: Übersicht – Änderung der Zeilenreihenfolge eines magischen 4x4-Quadrats.

b. Umordnungen der vier Quadranten

Die Abbildungen 18 b., c. und d. zeigen Beispiele für Umordnungen der vier Quadranten des vorgegebenen Quadrats 18a.:

In 18 b ist jeder der vier Quadranten von Abb.18 a. um + 90° gedreht worden, in 18 c. sind der zweite und der vierte Quadrant von Abb.18 a. vertauscht worden. Alle symmetrischen magischen 4x4-Quadrate bleiben bei diesen Umordnungen magisch.

In jeder Zeile von 18 d. stehen die vier Zahlen des entsprechenden Quadranten von 18 a. Bei dieser Umordnung bleiben alle semipandiagonalen 4x4-Quadrate magisch.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

a.

b	f	d	h
a	e	c	g
j	n	l	p
i	m	k	o

b.

a	b	i	j
e	f	m	n
c	d	k	l
g	h	o	p

c.

a	b	f	e
c	d	h	g
k	l	p	o
i	j	n	m

d.

Abb. 18

c. Weitere Beispiele für Umordnungen der Zahlen 1 bis 16

Die folgenden Beispiele für Zahlenvertauschungen in einem magischen 4x4-Quadrat haben gemeinsam, dass sie in vielen Fällen –insbesondere für alle semipandiagonalen Quadrate- wiederum ein magisches Quadrat ergeben. Ist das umgeordnete Quadrat magisch, so gehört es stets auch derselben Strukturgruppe wie das ursprüngliche magische Quadrat an.

- **Vertausche 1 mit 16, 2 mit 15, 3 mit 14, 4 mit 13, 5 mit 12, 6 mit 11, 7 mit 10 und 8 mit 9.**

  In diesem Fall erhält man stets wieder ein magisches Quadrat: Jede Zahl x = 1, 2, ..., 16 wird hier durch die Zahl 17 – x ersetzt. Eine Zeilen- (bzw. Spalten- oder Diagonalen-)summe $a+ b+ c+ d = 34$ geht somit über in $(17– a)+ (17– b)+ (17– c)+ (17– d) = 68 – (a + b + c + d) = 34$. (Allgemein bleibt jedes magische nxn-Quadrat magisch, wenn man jede der Zahlen $x = 1, 2,..., n^2$ durch n^2+1-x ersetzt.)

- **Vertausche 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6, 7 mit 8, 9 mit 10, 11 mit 12, 13 mit 14 und 15 mit 16.**

  Bei dieser Vertauschung wird jede ungerade Zahl um eins vergrößert und jede gerade Zahl um eins verkleinert. Diese Umordnung führt daher genau dann auf ein magisches Quadrat, wenn jede Zeile, jede Spalte und auch jede Diagonale des magischen Ausgangsquadrats zwei gerade Zahlen und zwei ungerade Zahlen enthält.

- **Vertausche 1 mit 9, 2 mit 10, 3 mit 11, 4 mit 12, 5 mit 13, 6 mit 14, 7 mit 15 und 8 mit 16.**

  Bei dieser Umordnung wird jede der Zahlen 1 bis 8 um 8 vergrößert und jede der Zahlen 9 bis 16 um 8 verkleinert. Die Umordnung ergibt daher nur dann ein magisches Quadrat, wenn jede Zeile, jede Spalte und auch jede Diagonale des magischen Ausgangsquadrats genau zwei der Zahlen 1 bis 8 und zwei der Zahlen 9 bis 16 enthält.

- **Vertausche 1 mit 8, 2 mit 7, 3 mit 6, 4 mit 5, 9 mit 16, 10 mit 15, 11 mit 14 und 12 mit 13.**
- **Vertausche 2 mit 9, 4 mit 11, 6 mit 13, 8 mit 15 und lasse die übrigen Zahlen gleich.**
- **Vertausche 3 mit 9, 4 mit 10, 7 mit 13, 8 mit 14 und lasse die übrigen Zahlen gleich.**
- **Vertausche 2 mit 5, 4 mit 7, 10 mit 13, 12 mit 15 und lasse die übrigen Zahlen gleich.**
- **Vertausche 3 mit 5, 4 mit 6, 11 mit 13, 12 mit 14 und lasse die übrigen Zahlen gleich.**

5. Magische 5x5-Quadrate

Magische 5x5-Quadrate mit den Eintragungen 1 bis 25 haben die magische Konstante 65. Auch hier kann man Aufgaben zum Vervollständigen solcher Quadrate stellen (siehe Aufgabe 15 im Anhang). Weitere Anregungen für Fragestellungen zu magischen 5x5-Quadraten findet man in 5.a. bis e.

a. Regelmäßige Anordnung der geraden/ungeraden Zahlen

Da die magische Konstante 65 eine ungerade Zahl ist, müssen in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale eines magischen Quadrats mit den Zahlen 1 bis 25 entweder eine, oder drei oder fünf ungerade Zahlen stehen.

In diesem Zusammenhang bietet sich als Aufgabenstellung an, magische 5×5-Quadrate zusammenzusetzen, bei denen die Anordnung der 13 ungeraden Zahlen ein symmetrisches Muster bildet.

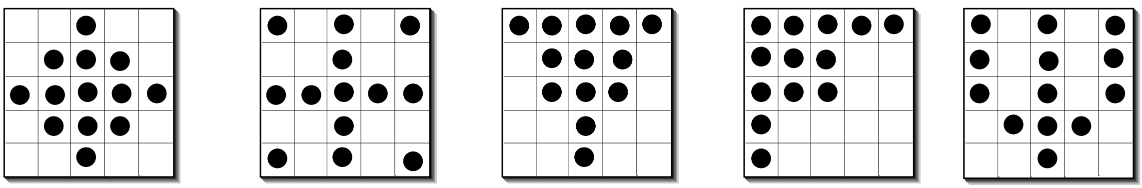


Abb. 19: Beispiele für mögliche symmetrische Anordnungen der 13 ungeraden Zahlen

b. Kombination aus einem magischen 3x3- und einem magischen 5x5-Quadrat

Eine relativ einfache Methode, ein magisches 5x5-Quadrat aus den Zahlen 1 bis 25 zu finden besteht darin, in die mittleren neun Felder des Quadrats ein magisches 3x3-Quadrat zu setzen und dann in jeder Zeile, Spalte und Diagonale zwei der restlichen 16 Zahlen passend zu ergänzen. (siehe Abb. 20)

19	1	18	4	23
21	10	15	14	5
20	17	13	9	6
2	12	11	16	24
3	25	8	22	7

Abb. 20: Geschachtelte magische Quadrate

Die neun Zahlen für das magische 3x3-Quadrat müssen in diesem Fall so gewählt werden, dass die magische Konstante dieses Teilquadrats 39 beträgt:

Die Summe aller 25 Zahlen des magischen 5x5-Quadrats beträgt $5 \cdot 65$.

Die Summe der neun Zahlen eines magischen 3x3-Quadrats mit Konstante K beträgt $3 \cdot K$, aus den übrigen 16 Zahlen müssen acht Zahlenpaare mit den Summen $65 - K$ gebildet werden.

Daraus folgt $5 \cdot 65 = 3 \cdot K + 8 \cdot (65 - K)$, und als Lösung dieser Gleichung erhält man $K = 39$.

Beispiele für neun Zahlen, aus denen man ein geeignetes magisches 3x3-Quadrat mit K = 39 zusammensetzen kann, sind neben 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 auch

8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18	7, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 19	6, 7, 8, 12, 13, 14, 18, 19, 20
5, 6, 7, 12, 13, 14, 16, 17, 18	4, 5, 6, 12, 13, 14, 20, 21, 22	3, 4, 5, 12, 13, 14, 21, 22, 23
2, 3, 4, 12, 13, 14, 22, 23, 24	1, 2, 3, 12, 13, 14, 23, 24, 25	6, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 20
5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21	4, 6, 8, 11, 13, 15, 18, 20, 22	3, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 21, 23
2, 4, 6, 11, 13, 15, 20, 22, 24	1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 6, 9, 10, 13, 16, 17, 20, 23
2, 5, 8, 10, 13, 16, 18, 21, 24	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25	

Analog dazu könnte man aus den Zahlen 1 bis 49 magische 7x7-Quadrate mit zwei weiteren ineinander geschachtelten magischen Quadraten bilden: Man setzt ein magisches 3x3-Quadrat mit Konstante 75 zusammen, und fügt in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale ein Zahlenpaar mit Summe 50 so hinzu, dass insgesamt ein magisches 5x5-Quadrat mit Konstante 125 entsteht. Schließlich vervollständigt man das magische 7x7-Quadrat mit Konstante 175, indem man jede Zeile, Spalte und Diagonale des 5x5-Quadrats geeignet durch ein Zahlenpaar mit Summe 50 ergänzt.

c. Pandiagonale magische 5x5-Quadrate

Abb. 21 zeigt ein 5x5-Quadrat, in dem jede der Größen A, B, C, D, E und a, b, c, d, e in jeder Zeile, jeder Spalte, jeder Diagonale und auch in jeder gebrochenen Diagonale genau einmal als Summand auftritt.

A+a	**B+b**	**C+c**	**D+d**	**E+e**
C+d	**D+e**	**E+a**	**A+b**	**B+c**
E+b	**A+c**	**B+d**	**C+e**	**D+a**
B+e	**C+a**	**D+b**	**E+c**	**A+d**
D+c	**E+d**	**A+e**	**B+a**	**C+b**

Abb. 21

Da $\{ x+y \mid x \in \{0, 5, 10, 15, 20\} \wedge y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = \{1, 2, 3,\dots, 25\}$ und da außerdem $0 + 5 + 10 + 15 + 20 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 65$ ist, folgt:

Egal in welcher Reihenfolge man die Größen A, B, C, D, E durch die Zahlen 0, 5, 10, 15, 20 und die Größen a, b, c, d, e durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 (oder umgekehrt A, B, C, D, E durch 1, 2, 3, 4, 5 und a, b, c, d, e durch 0, 5, 10, 15, 20) ersetzt, erhält man stets ein pandiagonales magisches 5x5-Quadrat mit den Eintragungen 1 bis 25.

Insgesamt gibt es 2 · 5! · 5! = 28 800 verschiedene Möglichkeiten, die Größen A bis E und a bis e mit diesen Zahlenwerten zu belegen. Unterscheidet man die gedrehten und gespiegelten Lagen der dieser Art erhaltenen 28 800 Quadrate nicht, so verbleiben 28 800/8 = 3 600 verschiedene pandiagonale magische 5x5-Quadrate. Bemerkenswert ist, dass es darüber hinaus keine weiteren pandiagonalen magischen 5x5-Quadrate gibt (siehe [4]).

Da jedes pandiagonale magische 5x5-Quadrat nach dem in Abb. 21 angegebenen zyklischen „Bauplan" zusammengesetzt ist, kann man aus Abb. 21 weitere Eigenschaften dieser Quadrate ablesen: So sieht man, zum Beispiel, unmittelbar, dass in jedem pandiagonalen magischen 5x5-Quadrat die folgenden fünf Zahlen die Summe 65 haben:

- die vier Ecken und die Mittenzahl des Quadrats,
- die vier Ecken und die Mittenzahl jedes der neun 3x3-Teilquadrate,
- die vier „Seitenmittelpunkte" und die Mittenzahl jedes der neun 3x3-Teilquadrate,
- die jeweils mittlere Zahl der ersten und letzten Zeile und der ersten und letzten Spalte und die Mittenzahl des Quadrats.

d. Weitere zyklische magische 5x5-Quadrate

In Abb. 21 sind die Summanden A, B, C, D, E der ersten Zeile in der zweiten Zeile um jeweils drei Stellen nach rechts (und die Summanden a, b, c, d, e um zwei Stellen nach rechts) zyklisch vertauscht angeordnet. Dieselbe zyklische Vertauschung wird auch bei den übrigen Zeilen fortgesetzt.

Genauso könnte man von Zeile zu Zeile die Summanden A, B, C, D, E um nur eine Stelle und die Summanden a, b, c, d, e um zwei (oder um drei oder um vier) Stellen zyklisch nach rechts verschieben bzw. A, B, C, D, E um vier Stellen und a, b, c, d um zwei (oder um drei) Stellen. Auch diese zyklischen Anordnungen führen bei geeigneter Belegung der Größen A, B, C, D, E und a, b, c, d, e mit den Zahlen 0, 5, 10, 15, 20, 1, 2, 3, 4, 5 auf magische 5x5-Quadrate, die allerdings nicht mehr pandiagonal sind.

Abb. 22 zeigt jene Anordnung, bei der A, B, C, D, E um jeweils eine Stelle und a, b, c, d, e um jeweils vier Stellen nach rechts verschoben sind:

Da in Abb. 22 die Größe E in der rechten Diagonale fünf Mal vorkommt und genauso die Größe a fünf Mal in der linken Diagonale, erhält man nur dann ein magisches Quadrat,

- wenn E = 10 und a = 3 ist und A, B, C, D in beliebiger Reihenfolge mit den Werten 0, 5, 15, 20 sowie b, c, d, e in beliebiger Reihenfolge mit 1, 2, 4, 5 belegt werden
- bzw. wenn E = 3 und a = 10 ist und A, B, C, D in beliebiger Reihenfolge mit den Werten 1, 2, 4, 5 sowie b, c, d, e in beliebiger Reihenfolge mit 0, 5, 15, 20 belegt werden.

A+a	**B+b**	**C+c**	**D+d**	**E+e**
B+e	**C+a**	**D+b**	**E+c**	**A+d**
C+d	**D+e**	**E+a**	**A+b**	**B+c**
D+c	**E+d**	**A+e**	**B+a**	**C+b**
E+b	**A+c**	**B+d**	**C+e**	**D+a**

Abb. 22

Insgesamt ergibt diese zyklische Anordnung somit 2·4!·4! = 1152 (bzw. von symmetrischen Lagen abgesehen 1152/8 = 144) verschiedene magische 5x5-Quadrate.

Setzt man in Abb. 22 insbesondere A = 20, B = 5, C = 15, D = 0, E = 10 sowie a = 3, b = 1, c = 4, d = 2, und e = 5, so erhält man dasselbe magische 5x5-Quadrat wie mit der in Aufgabe 16 des Anhangs angegebenen „Konstruktionsvorschrift".

e. Symmetrische magische 5x5-Quadrate

Ein magisches 5x5-Quadrat heißt **symmetrisch**, wenn die Zahl 13 im Mittelfeld des Quadrats steht und die zwölf Zahlenpaare mit Summe 26 symmetrisch zum Mittelfeld angeordnet sind.

Magische 4x4-Quadrate können nicht gleichzeitig symmetrisch und pandiagonal sein, magische 5x5-Quadrate dagegen schon. Von gedrehten und gespiegelten Lagen abgesehen gibt es genau 16 verschiedene symmetrische pandiagonale 5x5-Quadrate. Alle diese Quadrate kann man mit Hilfe des obigen Konstruktionsprinzips erhalten: Abb. 21 ergibt genau dann ein symmetrisches pandiagonales Quadrat,

- wenn $B = 10 \wedge d = 3 \wedge A + C = D + E = 20 \wedge a + b = c + e = 6$
- bzw. wenn $B = 3 \wedge d = 10 \wedge A + C = D + E = 6 \wedge a + b = c + e = 20$

6. Magische Quadrate mit anderen Eintragungen

Ersetzt man in einem magischen nxn-Quadrat mit den Zahlen $x = 1, 2, 3, ..., n^2$ und der magischen Konstante K jede Eintragung x durch die Zahl $c \cdot x + d$ (für zwei vorgegebene reelle Zahlen c und d mit $c \neq 0$), so erhält man ein nxn-Zahlenquadrat, in dem jede Zeilensumme, jede Spaltensumme und jede Diagonalensumme denselben Wert $c \cdot K + n \cdot d$ hat.

Verzichtet man auf die Forderung, dass ein magisches Quadrat aus den Zahlen 1 bis n^2 zusammengesetzt sein soll und verlangt nur, dass alle Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen gleich groß sind, so kann man aus jeder vorgegebenen endlichen arithmetischen Folge von n^2 reellen Zahlen magische nxn-Quadrate zusammensetzen.

Literatur:

[1] Ahrens, W.: Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Teubner Verlag, Leipzig (1901).
[2] Danielsson, H.: www.magic-squares.de
[3] Dudeney, H.: Amusements in Mathematics. Dover Publications (1917, Neuausgabe 1958)
[4] Gaspalou, F.: www.gaspalou.fr/magic-squares
[5] Heinz, H.: www.geocities.com/~harveyh/magicsquare.htm
[6] Koth M.: Spielereien mit Zahlen und Ziffern. Aulis Verlag Deubner, Köln (2005).
[7] Pickover, A.C.: The Zen of magic squares, circles and stars. Princeton University Press, Princeton (2002).

Prof. Dr. Maria Koth
Pädagogische Hochschule Wien
und Fakultät für Mathematik
der Universität Wien
maria.koth@univie.ac.at

Anhang:
Aufgabenstellungen zu magischen Quadraten

1 **a.** Überprüfe, ob dieses Zahlenquadrat ein magisches Quadrat ist!

b. Wie groß ist die magische Konstante
- eines magischen 4×4-Quadrats mit den Eintragungen 1 bis 16
- eines magischen 5×5-Quadrats mit den Eintragungen 1 bis 25
- eines magischen 6×6-Quadrats mit den Eintragungen 1 bis 36
- eines magischen 7×7-Quadrats mit den Eintragungen 1 bis 49

2	14	11	7
16	9	4	5
1	8	13	12
15	3	6	10

Vervollständige die magischen Quadrate mit den Eintragungen 1 bis 16!

2

a.

1			14
		9	3
10	4		5

b.

		9	14
10		3	
15	12		
	2		

c.

	5	4	
8	10		
		6	12
			7

d.

			15
	3	9	6
	8	14	
			12

3

a.

		16	
		1	14
	13	8	11
			4

b.

			3
		15	12
16	9	4	
	11		

c.

	7		
	13	4	16
	12	5	
			6

d.

			13
5		1	
		8	
11	7		6

4

a.

6			11
		1	
7			
9	3		8

b.

	14		
2	11	5	
9			7

c.

	6		13
	8	10	
	9	7	4

d.

	16	2	1
	9	7	12

5 Ergänze die fehlenden Zahlen 1 bis 10 so, dass magische 4×4-Quadrate entstehen!
Finde jeweils alle möglichen Lösungen!

a.

	11		14
13		12	
16			
			15

b.

13			12
	15		
11			14
		16	

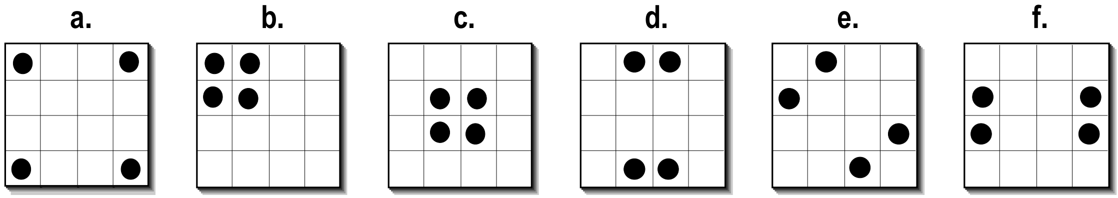
c.

		15	16
14	13		
11			
	12		

d.

		14	11
16			
		12	13
	15		

6 Welche dieser Vierergruppen von Zahlen hat in jedem magischen 4x4-Quadrat aus den Zahlen 1 bis 16 die Summe 34, welche nicht?



7 Bleibt jedes magische 4×4-Quadrat aus den Zahlen 1 bis 16 magisch, wenn man die folgenden Zahlenvertauschungen durchführt?

a. Vertausche 2 mit 9, 4 mit 11, 6 mit 13 und 8 mit 15 und lasse die übrigen Zahlen gleich.
b. Vertausche 3 mit 5, 4 mit 6, 11 mit 13 und 12 mit 14 und lasse die übrigen Zahlen gleich.
c. Vertausche 1 mit 8, 2 mit 7, 3 mit 6, 4 mit 5, 9 mit 16, 10 mit 15, 11 mit 14 und 12 mit 13.
d. Vertausche 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6, 7 mit 8, 9 mit 10, 11 mit 12, 13 mit 14 und 15 mit 16.
e. Vertausche 1 mit 16, 2 mit 15, 3 mit 14, 4 mit 13, 5 mit 12, 6 mit 11, 7 mit 10 und 8 mit 9.

8 **Besondere magische 4x4-Quadrate**

Ein magisches 4x4-Quadrat mit den Zahlen 1 bis 16 heißt:

- **pandiagonal**, wenn alle sechs „gebrochenen“ Diagonalen die Summe 34 haben.
- **semipandiagonal**, wenn die beiden aus je zwei mal zwei Zahlen bestehenden „gebrochenen“ Diagonalen die Summe 34 haben.
- **symmetrisch**, wenn alle symmetrisch zum Quadratmittelpunkt liegenden Zahlenpaare die Summe 17 haben.

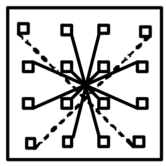
8	13	12	1
11	2	7	14
5	16	9	4
10	3	6	15

8	13	12	1
11	2	7	14
5	16	9	4
10	3	6	15

4	5	10	15
11	14	1	8
13	12	7	2
6	3	16	9

4	5	10	15
11	14	1	8
13	12	7	2
6	3	16	9

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



a. Zeige, dass jedes symmetrische magische 4x4-Quadrat semipandiagonal ist!
b. Welche der magischen Quadrate aus den Aufgaben 1 bis 5 sind pandiagonal, welche sind semipandiagonal, welche sind symmetrisch?

9 Begründe:

a. Schneidet man in einem pandiagonalen magischen 4x4-Quadrat die erste Zeile (bzw. erste Spalte) ab und fügt sie unterhalb der vierten Zeile als letzte Zeile an (bzw. rechts neben der vierten Spalte als letzte Spalte an), so erhält man wieder ein pandiagonales magisches Quadrat.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p
a	b	c	d

b. Schneidet man in einem semipandiagonalen (bzw. in einem symmetrischen) magischen 4x4-Quadrat die ersten beiden Zeilen ab und fügt sie unterhalb der vierten Zeile als neue dritte und vierte Zeile an, so erhält man wieder ein semipandiagonales (bzw. ein symmetrisches) magisches Quadrat.

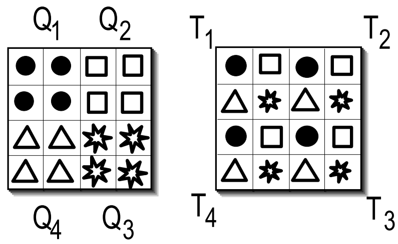
a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

i	j	k	l
m	n	o	p
a	b	c	d
e	f	g	h

10 Begründe:

Ein magisches 4x4-Quadrat mit den Zahlen 1 bis 16 ist genau dann semipandiagonal,

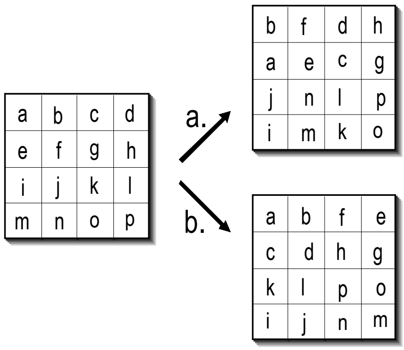
a. wenn jeder der vier Quadranten Summe 34 hat,
b. wenn jedes der vier 3x3-Teilquadrate Summe 34 hat.



11 Begründe:

a. Dreht man in einem symmetrischen magischen 4x4-Quadrat jeden der vier Quadranten um + 90° (siehe Abb. a. rechts), so erhält man wieder ein symmetrisches magisches Quadrat.

b. Verwandelt man die vier Quadranten eines semipandiagonalen magischen Quadrats in Zeilen (wie in Abb. b. rechts), so erhält man wieder ein semipandiagonales magisches Quadrat.



12 Bleibt jedes semipandiagonale magische 4×4-Quadrat magisch, wenn man

a. die erste mit der zweiten Zeile vertauscht,
b. die erste mit der zweiten Zeile und anschließend die erste mit der zweiten Spalte vertauscht,
c. die erste mit der zweiten Zeile und anschließend die dritte mit der vierten Spalte vertauscht,
d. die erste mit der dritten Zeile und anschließend die erste mit der dritten Spalte vertauscht,
e. die erste mit der dritten Zeile und anschließend die zweite mit der vierten Spalte vertauscht?

13 Die Zeilen 1, 2, 3, 4 eines magischen 4x4-Quadrats können in 24 verschiedenen Reihenfolgen als Zeilen eines 4x4-Zahlenquadrats angeordnet werden:

1-2-3-4, 1-2-4-3, 1-3-2-4, 1-3-4-2, 1-4-2-3, 1-4-3-2, 2-1-3-4, ..., 4-3-2-1.

Bei welchen dieser 24 Zeilenanordnungen bleibt

a. jedes pandiagonale magische 4x4-Quadrat magisch,
b. jedes symmetrische magische 4x4-Quadrat magisch,
c. jedes semipandiagonale magische 4x4-Quadrat magisch,
d. jedes magische 4x4-Quadrat magisch?

e. Zeige dass für jede dieser 24 Zeilenanordnungen gilt: Ändert man die Reihenfolge der vier Zeilen eines semipandiagonalen magischen 4x4-Quadrats, und ändert man anschließend im erhaltenen Zahlenquadrat die Reihenfolge der vier Spalten in gleicher Weise, so erhält man wiederum ein semipandiagonales magisches 4x4-Quadrat.

14 Wie ändert sich die magische Konstante 34 eines magischen 4x4-Quadrats mit den Eintragungen 1 bis 16, wenn man

a. zu jeder der Zahlen 1 bis 16 dieselbe reelle Zahl c addiert,
b. jede der Zahlen 1 bis 16 mit derselben reellen Zahl $d \neq 0$ multipliziert.
c. Ändere die Zahlen 1 bis 16 des magischen 4x4-Quadrat aus Aufgabe 1 so ab, dass ein magisches 4x4-Quadrat mit ganzzahligen Eintragungen und der folgenden magischen Konstante K entsteht: **c_1.** K = 50 **c_2.** K = 68 **c_3.** K = 48 **c_4.** K = 10 **c_4.** K = 0

15 Ergänze die fehlenden Zahlen so, dass magische Quadrate mit den Eintragungen 1 bis 25 entstehen!

a.

8	17			11
	23		14	
		13	7	
		6	18	22
	9	20	21	

b.

				11
21			15	17
7	1	13		
5	12	16	23	
	20			3

c.

24			3	12
		14	25	
		8	17	
	19	5	11	
		22		20

d.

8				25
2			6	14
21		12	5	18
	3	16	24	

e.

23			9	12
2			11	
19		13		
	14		3	
	21		17	8

f.

12	5			
10	14		18	22
		13		
16	23		15	4
3				

g.

	12	21	18	10
	20	9	2	11
			25	19
			6	3

h.

21	12			
7	25			
5	8	24	11	
18	4	6	22	

i.

8	2		20	24
16				12
22				18
15	19		7	1

16 **a.** Ordne die Zahlen 1 bis 25 nach der folgenden Vorschrift in einem 5x5-Quadrat an! Überzeuge dich, dass du dabei ein magisches 5x5-Quadrat erhalten hast!

Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 25 werden fortlaufend in diagonaler Richtung von links unten nach rechts oben in die Felder eines 5×5-Quadrats eingetragen. Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

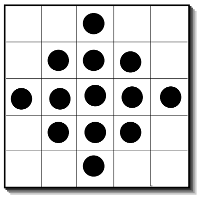
1. Setze die erste Zahl in das Feld unmittelbar über der Mittelzelle des Quadrats!
2. Wird der obere Quadratrand erreicht, so setze im untersten Feld der nächsten Spalte fort!
3. Wird der rechte Quadratrand erreicht, so setze im ersten Feld der nächsthöheren Zeile fort!
4. Wird eine Zelle erreicht, in der bereits eine Zahl steht, so setze im Feld zwei Reihen oberhalb der zuletzt geschriebenen Zahl fort! Liegt dieses Feld bereits außerhalb des Quadrats, so setze im untersten Feld derselben Spalte fort!
5. Wird die rechte obere Ecke erreicht, so setze die nächste Zahl in die vorletzte Zeile der letzten Spalte!

b. Ordne nach derselben Vorschrift auch die Zahlen 1 bis 9 in einem 3x3-Quadrat, die Zahlen 1 bis 49 in einem 7x7-Quadrat bzw. die Zahlen 1 bis 81 in einem 9x9-Quadrat an! Erhältst du auch hier stets magische Quadrate?

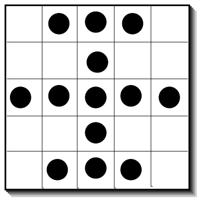
17 Spezielle Anordnungen der 13 ungeraden Zahlen

Setze ein magisches 5×5-Quadrat aus den Zahlen 1 bis 25 zusammen, bei dem die 13 ungeraden Zahlen in den markierten Feldern stehen.

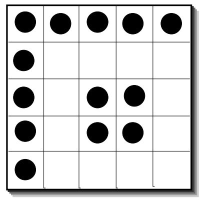
a.



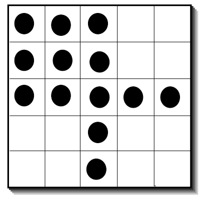
b.



c.



d.



18 Kombination aus einem magischen 3×3- und einem magischen 5×5-Quadrat

a. Rechts siehst du ein magisches 3×3-Quadrat mit den Eintragungen 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Ergänze die Zahlen in den leeren Kästchen so, dass ein magisches 5×5-Quadrat mit den Eintragungen 1 bis 25 entsteht!

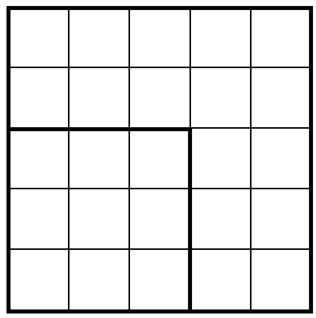
	7	21	11	
	17	13	9	
	15	5	19	

b. Setze in die mittleren neun Felder eines 5x5-Quadrats ein magisches 3x3-Quadrat aus den Zahlen 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 und 17 und ergänze wiederum die restlichen Felder so, dass ein magisches 5x5-Quadrat mit den Zahlen 1 bis 25 entsteht.

c. Überlege, dass als magische Konstante des 3x3-Quadrats in einem solchen kombinierten magischen Quadrat aus den Zahlen 1 bis 25 nur die Zahl 39 in Frage kommt!

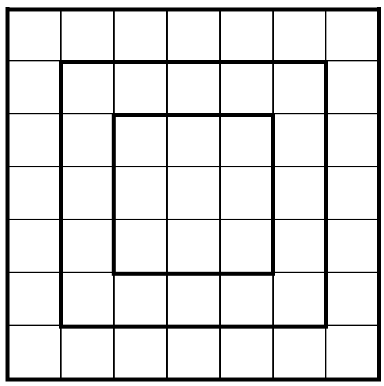
d. Finde weitere Beispiele ineinander geschachtelter magischer 3x3- und 5x5-Quadrate aus den Zahlen 1 bis 25! Welche neun Zahlen kommen dabei für das magische 3x3-Quadrat in Frage?

e. Finde Beispiele für ineinandergeschachtelte magische 3x3- und 5x5-Quadrate, bei denen das magische 3x3-Quadrat in der linken unteren Ecke des magischen 5x5-Quadrats angeordnet ist!



19 Drei geschachtelte magische Quadrate

Aus den Zahlen 1 bis 49 kannst du ein magisches 7x7-Quadrat mit zwei weiteren ineinander geschachtelten magischen Quadraten zusammensetzen:



a. Schreibe in die mittleren neun Felder ein magisches 3x3-Quadrat aus den Zahlen 21 bis 29!

b. Ergänze in den 16 unmittelbar angrenzenden Feldern die Zahlen 13 bis 20 und 30 bis 37 so, dass ein magisches 5x5-Quadrat aus den Zahlen 13 bis 37 entsteht! Überlege zuerst, wie groß die magische Konstante dieses 5x5-Quadrats ist!

c. Ordne schließlich die restlichen Zahlen so in den Feldern des äußeren Ringes an, dass du insgesamt ein magisches 7x7-Quadrat erhältst!

20 **Symmetrische magische 5x5-Quadrate**

Ein magisches 5x5-Quadrat heißt symmetrisch, wenn die Zahl 13 im Mittelfeld des Quadrats steht und alle Zahlenpaare, die symmetrisch zum Mittelfeld liegen die Summe 26 haben.

Welche der magischen Quadrate aus den Aufgaben 15 bis 18 sind symmetrisch?

9	23	2	20	11
22	5	16	14	8
1	19	13	7	25
18	12	10	21	4
15	6	24	3	17

21 **Pandiagonale magische 5×5-Quadrate**

a. Überprüfe durch Nachrechnen, dass die rechts abgebildeten 5×5-Quadrate pandiagonale magische Quadrate sind!

b. Welche der magischen 5×5-Quadrate aus Aufgabe 15 sind pandiagonal?

19	23	1	10	12
5	7	14	18	21
13	16	25	2	9
22	4	8	11	20
6	15	17	24	3

24	3	17	15	6
12	10	21	4	18
1	19	13	7	25
8	22	5	16	14
20	11	9	23	2

22 **a.** Setze im rechts abgebildeten Quadrat A = 0, B = 5, C = 10, D = 15 und E = 20 sowie a = 1, b = 2, c = 3, d = 4 und e = 5. Überprüfe durch Nachrechnen, dass du ein pandiagonales magisches 5x5-Quadrat mit den Eintragungen 1 bis 25 erhalten hast!

b. Setze A = 3, B = 2, C = 5, D = 1, E = 4 sowie a = 0, b = 5, c = 10, d = 15 und e = 20. Erhältst du auch in diesem Fall ein pandiagonales magisches 5x5-Quadrat?

A+a	B+b	C+c	D+d	E+e
C+d	D+e	E+a	A+b	B+c
E+b	A+c	B+d	C+e	D+a
B+e	C+a	D+b	E+c	A+d
D+c	E+d	A+e	B+a	C+b

c. Begründe: Egal in welcher Reihenfolge man die Größen A, B, C, D, E durch die Zahlen 0, 5, 10, 15, 20 und die Größen a, b, c, d, e durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 (oder A, B, C, D, E durch 1, 2, 3, 4, 5 und a, b, c, d, e durch 0, 5, 10, 15, 20) ersetzt, erhält man stets ein pandiagonales magisches 5x5-Quadrat mit den Eintragungen 1 bis 25.

d. Setze einige weitere pandiagonale magische 5x5-Quadrate zusammen!

23 Von symmetrischen Lagen abgesehen gibt es insgesamt 3600 verschiedene pandiagonale magische 5x5-Quadrate mit den Eintragungen 1 bis 25, und jedes dieser Quadrate kann mit der in Aufgabe 22 c vorgestellten Methode erzeugt werden.

a. In welcher Reihenfolge musst du den Größen A, B, C, D, E, a, b, c, d und e aus der Abbildung zu Aufgabe 22 die Zahlen 0, 5, 10, 15, 20, 1, 2, 3, 4 und 5 zuordnen, um die beiden pandiagonalen magischen Quadrate aus Aufgabe 21 zu erhalten?

b. Wie muss man die Größen A, B, C, D, E den Zahlen 0, 5, 10, 15 und a, b, c, d, e den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 (bzw. A, B, C, D, E den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und a, b, c, d, e den Zahlen 0, 5, 10, 15) zuordnen, um symmetrische pandiagonale magische 5x5-Quadrate zu erhalten?

c. Setze einige Beispiele für symmetrische pandiagonale magische 5x5-Quadrate zusammen!

d. In jedem pandiagonalen magischen 5×5-Quadrat gibt es neben den Zeilen, Spalten und Diagonalen noch zahlreiche weitere Fünfergruppen von Zahlen, die ebenfalls die magische Konstante als Summe haben. Kannst du solche Zahlengruppen in der Abbildung zu Aufgabe 22 entdecken?